

## METODO DEL TRAPECIO.

El **método del trapecio compuesto** es un método el cual sirve para aproximar los valores de las distintas integrales, pero solo aproximaciones. Este método consiste en dividir el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de una misma amplitud y así aproximar al valor real de la integral.

Ejemplo:

Calcular el área bajo la curva de la siguiente función:  $\int_{-1}^1 x^3 dx$  con 4 trapecios. (El valor real de la integral es  $0.5 u^2$ ).

Aplicando la fórmula del trapecio compuesto:

$$A = \frac{h}{2} \left[ f(X_0) + f(X_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(X_i) \right]$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$

Sustituyendo en las fórmulas anteriores:

$$h = \frac{1 - (-1)}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Ya que tenemos la altura podemos obtener los nuevos intervalos:

$X_n$	$f(X_n)$
$X_0 = a = -1$	$f(X_0) = -1$
$X_1 = X_0 + h = -1 + 0.5 = -0.5$	$f(X_1) = -0.125$
$X_2 = X_1 + h = -0.5 + 0.5 = 0$	$f(X_2) = 0$
$X_3 = X_2 + h = 0 + 0.5 = 0.5$	$f(X_3) = 0.125$
$X_4 = X_3 + h = 0.5 + 0.5 = 1$	$f(X_4) = 1$

Sustituyendo en la fórmula del trapecio compuesto:

$$A = \frac{h}{2} [f(X_0) + f(X_4) + 2(f(X_1) + f(X_2) + f(X_3))]$$

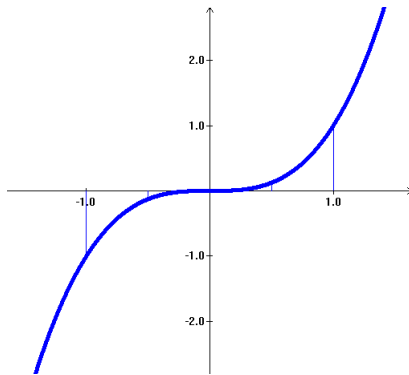
$$A = \frac{0.5}{2} [f(-1) + f(1) + 2(f(-0.5) + f(0) + f(0.5))]$$

$$A = \frac{0.5}{2} [-1 + 1 + 2(-0.125 + 0 + 0.125)]$$

$$A = 0u^2$$

Como podemos observar el resultado del método es cero, esto no significa que no exista un área bajo la curva, sino que matemáticamente las áreas se cancelan debido a que los intervalos son simétricos.

Una forma de solucionar el problema es analizar la gráfica de la función a integrar y definir nuevos intervalos.



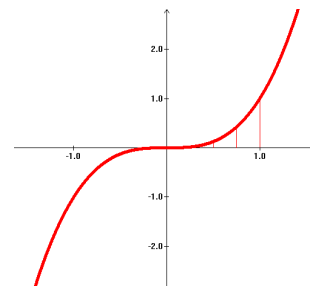
Como geoméricamente las 2 áreas comprendidas entre los intervalos son iguales, podemos definir la integral de  $[0, 1]$  y ese resultado multiplicarlo por 2.

Entonces, resolveremos la siguiente función:

$$2 \int_0^1 x^3 dx$$

Aplicando las fórmulas del trapecio compuesto:

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$



Ya que tenemos la altura podemos obtener los nuevos intervalos:

$X_n$	$f(X_n)$
$X_0 = a = 0$	$f(X_0) = 0$
$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$	$f(X_1) = 0.015625$
$X_2 = X_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5$	$f(X_2) = 0.125$
$X_3 = X_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$	$f(X_3) = 0.421875$
$X_4 = X_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1$	$f(X_4) = 1$

Sustituyendo en la fórmula del trapecio compuesto:

$$A = \frac{h}{2} [f(X_0) + f(X_4) + 2(f(X_1) + f(X_2) + f(X_3))]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))] ]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [0 + 1 + 2(0.015625 + 0.125 + 0.421875)] ]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 2(0.5625)] = \frac{0.25}{2} [1 + 1.125] = \frac{0.25(2.125)}{2}$$

$$A = 0.265625u^2$$

Ahora ese resultado lo multiplicamos por 2:

$$A = 2(0.265625)$$

$$A = 0.53125u^2$$

Con este método el valor que obtuvimos no es muy preciso debido al número de trapecios:

$$0.5u^2 \approx 0.53125u^2$$

La otra forma de obtener el área bajo la curva es la de aplicar la fórmula con los intervalos originales, solo que ahora deberá de ser el valor absoluto de las  $f(X_n)$ , de esa manera matemáticamente ya no se eliminan:

$$h = \frac{1 - (-1)}{4} = \frac{2}{4} = 0.5$$

Ya que tenemos la altura podemos obtener los nuevos intervalos:

$X_n$	$f(X_n)$
$X_0 = a = -1$	$f(X_0) = -1$
$X_1 = X_0 + h = -1 + 0.5 = -0.5$	$f(X_1) = -0.125$
$X_2 = X_1 + h = -0.5 + 0.5 = 0$	$f(X_2) = 0$
$X_3 = X_2 + h = 0 + 0.5 = 0.5$	$f(X_3) = 0.125$
$X_4 = X_3 + h = 0.5 + 0.5 = 1$	$f(X_4) = 1$

Sustituyendo en la fórmula del trapecio compuesto:

$$A = \frac{h}{2} [abs|f(X_0)| + abs|f(X_4)| + 2(abs|f(X_1)| + abs|f(X_2)| + abs|f(X_3)|)]$$

$$A = \frac{0.5}{2} [abs|f(-1)| + abs|f(1)| + 2(abs|f(-0.5)| + abs|f(0)| + abs|f(0.5)|)]$$

$$A = \frac{0.5}{2} [| -1| + |1| + 2(| -0.125| + |0| + |0.125|)]$$

$$A = \frac{0.5}{2} [2 + 2(0.25)] = \frac{0.5}{2} (2 + 0.5) = \frac{0.5(2.5)}{2}$$

$$A = 0.625u^2$$

De esta manera se obtiene un  $0.5u^2 \neq 0.625u^2$  área aproximada, debido a que solo se ocuparon 4 trapecios, pero con los valores absolutos en la ecuación original ya no obtenemos un resultado nulo.