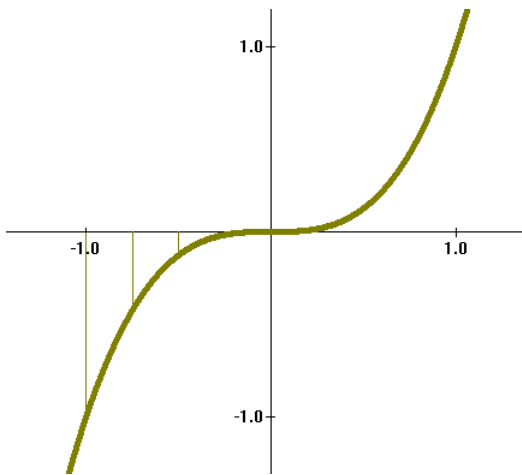


Ejercicio.

Obtener el área bajo la curva de la siguiente función:

$$\int_{-1}^0 x^3 dx \quad \text{Realizar el método con 4 trapecios.}$$

(El valor real de la integral es 0.25 u^2).



Para esta función, si queremos aplicar el método de trapecio compuesto, el área nos saldrá con un valor negativo, esto es debido a que el área a integrar se encuentra en el 3^{er} cuadrante del plano XY. Por lo que tenemos dos opciones:

☺ OPCION 1.- Aplicar el trapecio compuesto con las fórmulas que contengan el valor absoluto.

Obtenemos la altura de los trapecios:

$$h = \frac{0 - (-1)}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Realizamos una tabla para obtener los nuevos intervalos y las funciones evaluadas en dichos intervalos:

X_n	$f(X_n)$
$X_0 = a = -1$	$f(X_0) = -1$
$X_1 = X_0 + h = -1 + 0.25 = -0.75$	$f(X_1) = -0.421875$
$X_2 = X_1 + h = -0.75 + 0.25 = -0.5$	$f(X_2) = -0.125$
$X_3 = X_2 + h = -0.5 + 0.25 = -0.25$	$f(X_3) = -0.015625$
$X_4 = X_3 + h = -0.25 + 0.25 = 0$	$f(X_4) = 0$

Sustituyendo en la fórmula del método de trapecio compuesto (con valores absolutos):

$$A = \frac{h}{2} [abs|f(X_0)| + abs|f(X_4)| + 2(abs|f(X_1)| + abs|f(X_2)| + abs|f(X_3)|)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [abs|f(-1)| + abs|f(0)| + 2(abs|f(-0.75)| + abs|f(-0.5)| + abs|f(-0.25)|)]$$

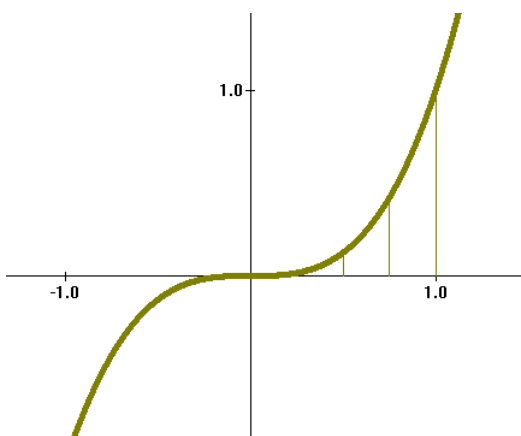
$$A = \frac{0.25}{2} [abs|-1| + abs|0| + 2(abs|-0.421875| + abs|-0.125| + abs|-0.015625|)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 0 + 2(0.421875 + 0.125 + 0.015625)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 2(0.5625)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 1.125]$$

$$A = 0.265625u^2$$



☺ OPCION 2.- Como la función x^3 es una función impar, se puede obtener el valor de la misma área solo cambiando los intervalos de la integral. En la siguiente gráfica se muestra como el área a integrar es la misma que si la giráramos 180° grados con respecto al eje X.

De esta forma tenemos 2 nuevos límites de integración y los cuales ocuparemos con el trapecio compuesto.

La nueva función es: $\int_0^1 x^3 dx$

Así que procederemos con el método con un número de 4 trapecios:

$$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Realizamos una tabla para obtener los nuevos intervalos y las funciones evaluadas en dichos intervalos:

X_n	$f(X_n)$
$X_0 = a = 0$	$f(X_0) = 0$
$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.25 = 0.25$	$f(X_1) = 0.015625$
$X_2 = X_1 + h = 0.25 + 0.25 = 0.5$	$f(X_2) = 0.125$
$X_3 = X_2 + h = 0.5 + 0.25 = 0.75$	$f(X_3) = 0.421875$
$X_4 = X_3 + h = 0.75 + 0.25 = 1$	$f(X_4) = 1$

Resolviendo la fórmula del método de trapecio compuesto:

$$A = \frac{h}{2} [f(X_0) + f(X_4) + 2(f(X_1) + f(X_2) + f(X_3))]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [f(0) + f(1) + 2(f(0.25) + f(0.5) + f(0.75))]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [0 + 1 + 2(0.015625 + 0.125 + 0.421875)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 2(0.5625)]$$

$$A = \frac{0.25}{2} [1 + 1.125]$$

$$A = 0.265625u^2$$

El área obtenida por las 2 opciones fue la misma, aplicando cualquier opción es válida para obtener el área bajo la curva. A pesar de eso el valor del área con 4 trapecios es mayor a valor real de la integral.

$$0.265625u^2 \neq 0.25u^2$$