Ejercicio

Aproxime el área bajo la curva de $\int_1^4 2x^2dx$ usando el método de integración de Romberg, usando 1,2,4 trapecios o 1, ½, ¼ (segmentos de longitud).

Para comprobar la eficacia del método se resolverá también por el método analítico.

$$\int_1^4 2x^2dx = 2\int_1^4 x^2dx = 2\left|\frac{x^3}{3}\right|_1^4 = 2\left|\frac{4^3}{3}-\frac{1^3}{3}\right| = 2(21.33-0.33)$$

$$\int_1^4 2x^2dx = 42$$ Integral 1

Mediante el método de trapecio compuesto se obtienen las primeras integrales.

Primero se calcula con 1 trapecio:

$$I(h_1) = \frac{4-1}{2}\left[2(1)^2 + 2(4)^2\right] = 1.5(2+32) = 51$$

$I(h_1) = 51$

Ahora se calcula con 2 trapecios:

Aquí se dividirá en área que se calculo para 1 trapecio en dos y se obtendrá el área de cada uno y luego se sumarán.

Primero se busca la x_{med}

$$h = \frac{4-1}{2} = 1.5$$

Ahora se busca la el fin del primer trapecio

X_{fin}= 1+x_{med}= 1+1.5 = 2.5

Por lo que las x's quedarán así

X_{ini}= 1

X_{med}= 2.5

Xfin=4

Para el segmento 1 de 2

$$I(h_{1.1}) = \frac{2.5-1}{2}\left[2(1)^2 + 2(2.5)^2\right] = 0.75(2+12.5) = 10.875$$

Para el segmento 2 de 2

$$I(h_{1.2}) = \frac{4-2.5}{2}\left[2(2.5)^2 + 2(4)^2\right] = 0.75(12.5+32) = 0.75*44.5 = 33.375$$

Ahora se suman $I(h_{1.1})$+$I(h_{1.2})$= 10.875+33.375=**44.25**

Como se puede apreciar con 2 trapecios es mucho mas preciso que con uno, dado que el resultado exacto es 42 que se obtuvo analíticamente en la Integral 1.

Para 4 trapecios

$$h = \frac{4-1}{4} = 0.75$$

X_{ini}= 1
X_1= X_{ini}.+ .75 = 1 + .75 = 1.75
X_2=x_1 + .75 = 2.5
X_3= x_2 + 0.75 = 3.25
X_{fin}= x_3 + 0.75 = 4

Para el segmento 1 de 4

$$I(h_{1.1}) = \frac{1.75-1}{2}\left[2(1)^2 + 2(1.75)^2\right] = 0.375(2+6.125) = 3.046875$$

Para el segmento 2 de 4

$$I(h_{1.2}) = \frac{2.5-1.75}{2}\left[2(1.75)^2 + 2(2.5)^2\right] = 0.375(6.125+12.5) = 0.375*18.625 = 6.984375$$

Para el segmento 3 de 4

$$I(h_{1.2}) = \frac{3.25-2.5}{2}\left[2(2.5)^2 + 2(3.25)^2\right] = 0.375(12.5+21.125) = 0.375*33.625 = 12.609375$$

Para el segmento 4 de 4

$$I(h_{1.2}) = \frac{4-3.25}{2}\left[2(3.25)^2 + 2(4)^2 +\right] = 0.375(21.125+32) = 0.375*53.125 = 19.921875$$

de la suma de las 4 áreas tenemos que

$$\int_1^4 2x^2 dx = 3.046875 + 6.984375 + 12.609375 + 19.921875$$

$$\int_1^4 2x^2 dx = 42.5625$$

Mediante el uso de la siguiente formula se procede al calculo del área bajo la curva

$$I_k^{(m)} = \frac{4^m I_{k+1}^{(m-1)} - I_k^{(m-1)}}{4^m - 1}$$

Primera iteración

51

$$\frac{4^1 * 44.25 - 51}{4^1 - 1}$$

44.25

$$\frac{4^1 * 42.5625 - 44.25}{4^1 - 1}$$

42.5625

51

$$\frac{126}{3} = 42$$

44.25

$$\frac{126}{3} = 42$$

42.5625

Segunda iteración

51

42

44.25

$$\frac{4^2 * 42 - 42}{4^2 - 1}$$

42

42.5625

51

42

44.25

42

42

42.5625

$\int_1^4 2x^2 dx$ =42