Aplicaciones de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo: Encontrar la carga para el capacitor del siguiente circuito LRC. Teniendo en cuenta los siguientes parámetros y condiciones iniciales.

Inductancia=L=0.05 H.
Capacitancia=C=0.01 F.
Resistencia=R=2 Ω.

Condiciones iniciales; q(0)=5 C , i(0)=0, v(t)=0, t= 0.01 s.

Entonces de acuerdo a las condiciones iniciales anteriores, la ecuación diferencial se propone en términos de la carga y representando el voltaje.

Voltaje en una resistencia=I(t)*R.
Voltaje en un capacitor= q(t)/C.
Voltaje en la inductancia= L di(t)/dt.

Definimos la corriente de la siguiente manera; i(t)= dq/dt.

Ahora sustituimos los voltajes en la siguiente ecuación.

v(t)= L d^2 q(t)/dt^2 + dq(t)/dt + q(t)/C

La ecuación diferencial propuesta la podemos escribir de la siguiente forma.

q”.L + q’.R +1/C .q=v(t)=0

Después sustituimos los valores de La resistencia, la inductancia y la capacitancia en nuestra ecuación.

q”.(0.05) + q’.(2)+ q/0.01=0

Entonces tenemos que sacar las raíces de nuestra ecuación aplicando la formula general, previamente hacemos un cambio de variable y una representación numérica en cuanto a los exponentes y lo hacemos de la siguiente manera.

λ^2(0.05)+ λ(2)+ 1/0.01=0

λ=(-2 ±(√4-4(0.05)(1/0.01))) / 2(0.01)

λ=(-2 ±(√4-20)) / 0.1

$\lambda=(-2 \pm(\sqrt{-16})) / 0.1$

$\lambda=(-2 + 4 i)) / 0.1$

$\lambda=-20 + 40 i$.

Entonces al calcular las raíces y ver que una parte es real y otra parte es imaginaria la solución se propone de la siguiente manera.

$e^{\alpha x}$ (C1 Cos βx + C2 Sen βx)

En donde:

- α es la parte real de la raíz.
- β es la parte imaginaria de la raíz.
- C1 y C2 son constantes.

De acuerdo a lo anterior planteamos la solución de la ecuación diferencial de la siguiente forma.

q(t)=e^-20t (C1 Cos 40t + C2 Sen 40t). (Solución principal)

Usando la primera condición inicial q(0)= 5

q(0)=e^-20(0) (C1 Cos 40(0) + C2 Sen 40(0))

q(0)=(C1 Cos (0) + C2 Sen (0)

C1= 5.

El siguiente paso se va basar en la definición de la corriente i(t)=dq/dt, por lo que vamos a derivar nuestra solución principal.

i(t)=e^-20t (-40 C1 Sen 40t + 40 C2 Cos 40t) - 20e^-20t (C1 Cos 40t + C2 Sen 40t)

De acuerdo a nuestra segunda condición inicial evaluamos la corriente en 0.

i(0)=e^-20(0) (-40 C1 Sen 40(0) + 40 C2 Cos 40(0)) - 20e^-20(0) (C1 Cos 40(0) + C2 Sen 40(0))

i(0)=40 C2 - 20 C1 = 0

Sustituimos la constante antes encontrada (C1).

40 C2 - 20 (5) = 0

Despejamos nuestra segunda constante.

40 C2 -100=0

40 C2 = -100

C2= -100 /40 = -5/2

El siguiente paso es sustituir las constantes en nuestra solución principal.

q(t)=e^-20t (5 Cos 40t - 5/2 Sen 40t).

Por ultimo para obtener el valor de la carga evaluamos nuestra solución con el valor del tiempo indicado en un principio.

q(0.01)=e^-20(0.01) (5 Cos 40(0.01) - 5/2 Sen 40(0.01)).

q=(0.81873) (5 Cos (0.4) - 5/2 Sen (0.4))

q=(0.81873) (4.999 - 0.0174)

q=(0.81873) (4.9816)

El valor de la carga es = 4.1 C.

RAZONES POR LAS CUALES ESTE EJERCICIO ANTES PRESENTADO NO PUEDE SER RESUELTO POR EL METODO DE EULER RUNG KUTTA, ES POR QUE NO EXISTE NINGUNA FUNCION “xy”, O EN SU DEFECTO QUE CONTENGA OTRAS VARIABLES.

EN ESTE CASO SE PRESENTO UNA ECUACION HOMOGENEA DE 1 ORDEN Y DE SEGUNDO GRADO, EN LA CUAL LA SOLUCION DEPENDE DE LAS RAICEZ DE LA ECUACION Y NO DE UNA FUNCION.