Dinámica poblacional.

El funcionamiento del modelo es la suposición de que la rapidez a la que crece la población en cierto tiempo es proporcional a la población total en ese momento. Si P(t) denota la población en el tiempo “t” entonces la dinámica poblacional es:

$$\frac{dp}{dt} = kp$$

Queremos eliminar la variable “p” (del otro lado de la igualdad). Multiplicamos 1/p para eliminar la variable.

$$\left(\frac{dp}{dt} = kp\right)\left(\frac{1}{p}\right)$$

Ahora la ecuación nos queda de la siguiente manera.

$$\frac{dp}{pdt} = k$$

La ecuación diferencial es de tipo “variables separables”.
Multiplicamos por “dt” para separar la ecuación.

$$\left(\frac{dp}{pdt} = k\right)(dt)$$

$$\left(\frac{dp}{p} = kdt\right)$$

Integramos.

$$\int \frac{dp}{p} = \int kdt$$

$$\ln|p| = kt + c$$

La ultima ecuación es una ecuación de tipo “lineal general”.
La operación inversa al logaritmo natural es le exponencial, de esta manera eliminaremos al “ln”.

$$e^{\ln|p|} = e^{kt+c}$$

$$p = e^{kt+c}$$

Ejemplo:
La población de un pueblo crece a una tasa proporcional a la población presente en el tiempo “t”, la población inicial es de 500 habitantes y se incrementa en 15% en 10 años.

a) ¿Cuál será la población en 30 años?

$$p = e^{kt+c}$$

Por ley de los exponentes podemos separar el exponente *kt+c* en dos partes.

$$p = e^{kt}.e^{c}$$

Substituimos a *t=0*, porque es en un tiempo inicial.

$$p = e^{k(o)}.e^{c}$$

La población inicial es de 500. Además hay que recordar que cualquier número elevado a la potencia cero es igual con 1. La ecuación queda de la siguiente manera

$$500 = e^{c} \quad (ecuación\ 1)$$

La población incrementa en un 15% y esta vez t=10; un incremento del 15 por ciento sobre 500 nos da como resultado 575.

$575 = e^{10k}.e^{c} \quad (ecuación\ 2)$

Substituimos la ecuación 1 en la ecuación 2.

$575 = e^{10k}.500$

Despejamos la exponencial.

$\frac{575}{500} = e^{10k}$

Eliminamos la exponencial con un logaritmo natural.

$\ln\frac{575}{500} = \ln e^{10k}$

$\ln\frac{575}{500} = 10k$

Despejamos a *k.*

$\frac{\ln\frac{575}{500}}{10} = k$

$k = 0.01397$

De la ecuación:

$p = e^{kt+c}$

Substituimos todas las variables con un tiempo igual a 30 años.
De esta manera nos queda que:

$p_{(30)} = 500.e^{(30)(0.01397)} = 760.4375$

En 30 años habrá 760.4375 personas.

b) ¿Qué tan rápido esta incrementando la población en t=30?

(rapides)

$\frac{760.4375 - 500}{30} = \frac{260.29}{30} = 8.67\ {}^{hab}/_{año}$

La rapidez con la que crece la población es de 8.67 habitantes por año.